# Hódmezővásárhelyi Városi Matematikaverseny
# 2003. április 14.
# A 11-12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

**1. feladat**

Egy számtani sorozatot az első eleme és különbsége egyértelműen meghatározza, azt kell tehát megnéznünk, hogy az $(a_1, d)$ értékpárt hányféleképpen választhatjuk meg. d értéke maximum 22 lehet, ugyanis az ötödik és első elem különbsége legföljebb 89.

(1 pont)

Amennyiben d=1, akkor az első elem az 1,…,86 számok valamelyike. d=2 esetén a kezdőérték 1,…82 lehet, tetszőleges d-re pedig az 1,… 90-4d számok valamelyike.

(2 pont)

A számtani sorozat tehát

$$\sum_{d=1}^{22}(90 - 4d) = 968$$

különféle módon választható meg.

(1 pont)

**2. feladat**

Jelöljük A-val a háromszög két ismert oldalegyenesének metszéspontjaként előálló csúcsot, B-vel és C-vel pedig a két ismeretlen csúcsot. Az A csúcs koordinátáit kiszámíthatjuk az adott oldalegyenesek egyeneteiből: (3,8)

(1 pont)

Legyenek a $-6x + y + 10 = 0$ egyenletű oldalegyenesre eső B csúcs koordinátái $(x_b, y_b)$, a $-3x + 4y - 23 = 0$ egyenletű egyenesre eső C csúcs koordinátái pedig $(x_c, y_c)$. A bevezetett ismeretleneket a megfelelő oldalegyenesek egyenleteibe behelyettesítve:

$$y_b = 6x_b - 10 \text{ , illetve}$$

$$y_c = \frac{3}{4}x_c + \frac{23}{4}$$

(1 pont)

Ismert, hogy a súlypont koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepei, így a következő két egyenletet kapjuk:

$$-\frac{1}{3} = \frac{x_b + x_c + 3}{3}$$

$$2 = \frac{6x_b - 10 + \frac{3x_c + 23}{4} + 8}{3}$$

(2 pont)

Az egyenletrendszer megoldása $x_b = 1$, $x_c = -5$, így a hiányzó csúcsok koordinátái (1, -4) illetve (-5, 2).

(2 pont)

Megjegyzés: amennyiben a versenyző más gondolatmenetet alkalmaz, a használható gondolatmenet felállításáért 4 pontot adjunk, további 2 pontot pedig a számítások helyes elvégzéséért.

**3. feladat**

Jelöljük $a_1$ -gyel a sorozat első elemét, q-val a hányadosát. A megadott adatokból a következő összefüggések kaphatók:

$$\frac{1}{72} = a_1 q^{n-1} = \frac{9}{128} q^{n-1},$$

$$\frac{55}{1152} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{9}{128} \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

(2 pont)

Vegyük észre, hogy az első egyenletből $q^{n-1} = \frac{16}{81}$, amit behelyettesíthetünk a második egyenletbe:

$$\frac{55}{1152} = \frac{9}{128} \frac{\frac{16}{81}q - 1}{q - 1}$$

(2 pont)

Az egyenletet megoldva $q = -\frac{2}{3}$. Az első egyenletből n értékére 5-öt kapunk.

(2 pont)

**4. feladat**

Legyen a háromszög legrövidebb oldala x, a leghosszabb pedig cx (c>1). Mivel az oldalak számtani sorozatot alkotnak, a középső oldal $\frac{c+1}{2}x$. A 120 fokos szöggel szemben a legnagyobb oldal van, erre felírhatjuk a koszinusz-tételt:

$$c^2 x^2 = x^2 + x^2 \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 + \frac{c+1}{2} x^2$$

(3 pont)

A fenti egyenletből c lehetséges értékei $\frac{7}{3}$ és –1. Az utóbbi nyilván nem felel meg a feladat geometriai tartalmának, így a háromszög oldalainak aránya 3:5:7.

(2 pont)

A hiányzó szögek a szinusz-tétel alkalmazásával kaphatók. A legrövidebb oldallal szemközti szöget $\alpha$-val jelölve: $\frac{\sin \alpha}{\sin 120°} = \frac{3}{7}$, amiből $\alpha = 21.79°$, a középső oldallal szemközti szög pedig 38.21°.

(2 pont)

**5. feladat**

Ahhoz, hogy a bal oldal értelmezett legyen, a logaritmusok argumentumainak pozitívoknak kell lenniük, vagyis

$$2^x - 2 > 0 \text{ és}$$
$$2^{x+1} + 7 > 0$$

A második feltétel minden valós számra teljesül, az első feltételből x>1 következik.

(2 pont)

Amennyiben az x-re kirótt feltétel teljesül, alkalmazhatók a logaritmus-függvény azonosságai, így az egyenlőtlenség az alábbival ekvivalens:

$$(2^x - 2)(2^{x+1} + 7) \geq 30$$

(2 pont)

Vezessünk be $2^x$ helyett új változót, ekkor az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(a - 2)(2a + 7) \geq 30, \text{ ami}$$
$$2a^2 + 3a - 44 \geq 0$$

alakra hozható.

(2 pont)

A másodfokú egyenlet megoldóképletét és a másodfokú függvény ismert tulajdonságait alkalmazva ez az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $a \leq -\frac{11}{2}$ vagy $a \geq 4$.

(1 pont)

Az első feltétel nyilván nem hoz megoldást, a másodikból x≥2 következik, ami meg is felel az x-re megszabott kezdeti feltételnek. Az eredeti egyenlőtlenség megoldása tehát: x≥2.

(1 pont)

Megjegyzés: nem kell megkövetelnünk, hogy a versenyző a levezetés elején ellenőrizze az eredeti egyenlőtlenségben szereplő kifejezések értelmezési tartományát, a lényeg, hogy valamikor elvégezze a diszkussziót. Helyes megoldásként az is elfogadható, ha a megkapott megoldáshalmazt ellenőrzi, feltéve, hogy ez a dolgozatból egyértelműen kiderül.

**6. feladat**

A függvény akkor és csak akkor értelmezett, ha a nevező 0-tól különbözik, ami pontosan akkor teljesül, ha x nem egész szám. Az értelmezési tartomány tehát: **R** \ **Z.**

(1 pont)

A továbbiakban bontsuk fel az értelmezési tartományt olyan intervallumokra, amelyeken belül a függvény viselkedése kényelmesebben tanulmányozható: tetszőleges k egész szám esetén a (k, k+1) intervallumon a függvény értéke:

$$f(x) = \frac{x}{x-k} = 1 + \frac{k}{x-k}$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény grafikonja minden szakaszon egy-egy hiperbolaív, amelynek az x=k egyenes aszimptotája.

k<0 esetén a (k, k+1) intervallumokon a függvény értéke sz.m. nő, k=0 esetén a függvényérték konstans 1, k>0 esetén az egyes intervallumokon sz. m. csökken.

(2 pont)

A függvénynek egyetlen lokális szélsőértéke van: a (0,1) intervallumon az 1 érték egyszerre lokális minimum és maximum (ha a versenyző a lokális minimumot és maximumot szigorúan értelmezi és ezt az értéket kizárja, megadható az érte járó pont, tekintve, hogy a tankönyvek sem teljesen egységesek a kérdésben)

(1 pont)

Negatív k esetén a függvény a (k, k+1) intervallumon minden y<k+1 értéket felvesz. Ez a következőképpen látható be: legyen y < k+1 (k<0, egész). Megmutatjuk, hogy ekkor az

$$1 + \frac{k}{x-k} = y$$

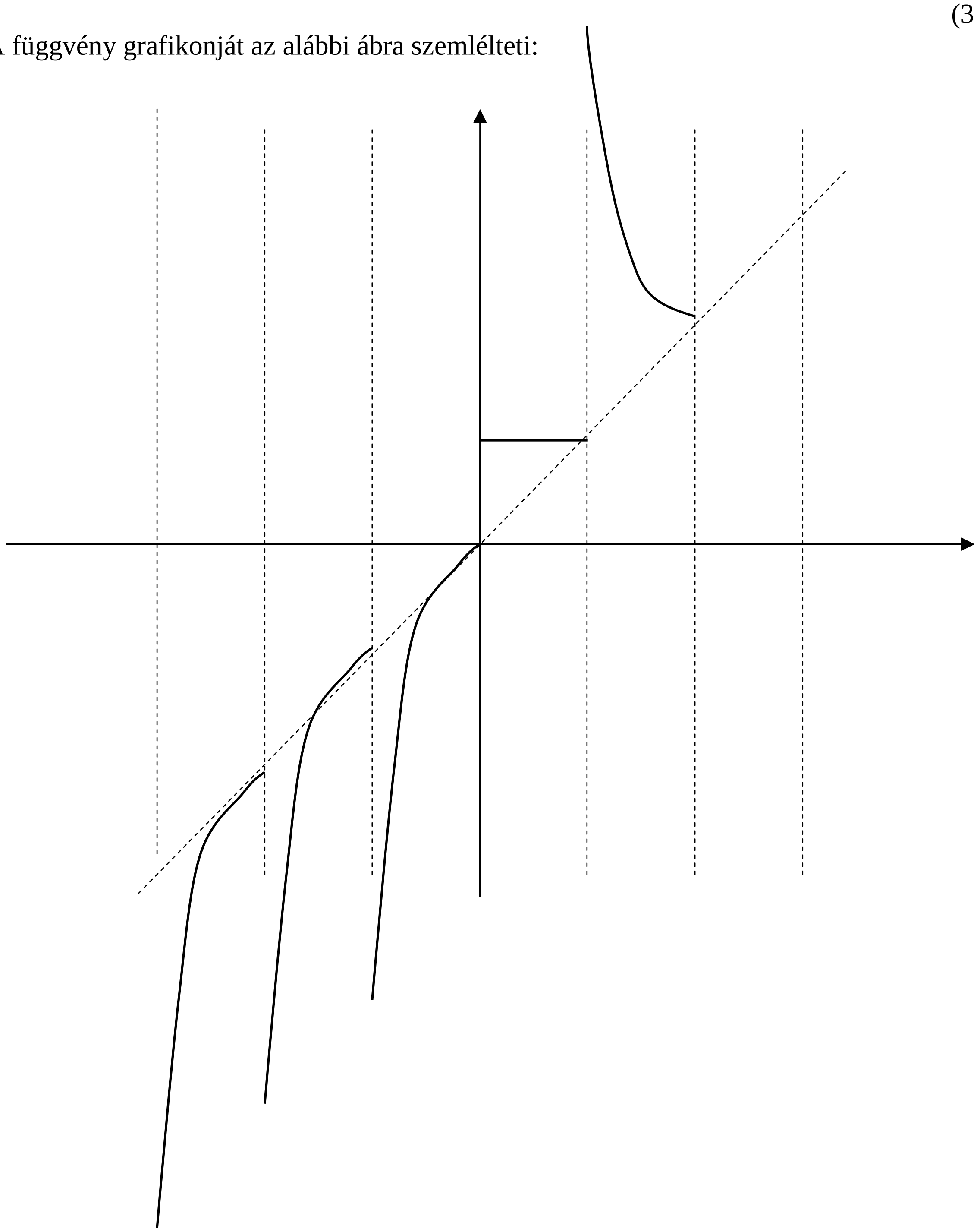
egyenletnek van k+1-nél kisebb és k-nál nagyobb megoldása. Valóban, az egyenletet x-re rendezve:

$$x = \frac{k}{y - 1} + k$$

Tekintve, hogy k negatív, y pedig k+1-nél kisebb, a k/(y-1) tört értéke 0 és 1 közé esik, tehát x valóban k és k+1 közötti érték.
Hasonló gondolatmenettel látható be, hogy pozitív egész k esetén a (k,k+1) intervallumon a függvény minden k+1-nél nagyobb valós értéket felvesz.
Így a függvény értékkészlete: $\{x \in \mathbf{R} \mid x<0\} \cup \{1\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x>2\}$

(3 pont)

A függvény grafikonját az alábbi ábra szemlélteti:



(1 pont)

Megjegyzés:

1. Ha a versenyző a negatív számokra tévesen használja az egészrész definícióját, de egyébként következetesen számol, a tévedésért összesen két pontot vonjunk le.

2. Az értékkészlet megállapítására a 3 pont akkor adható, ha a dolgozatban legalább a fenti részletességű indoklás található arra, hogy az egyes intervallumokon a függvény valóban minden mondott értéket fölvesz. Az indoklás nélküli helyes eredményre 1 pontot adjunk.