ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2005. május 29.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÉRETTSÉGI VIZSGA

Az írásbeli vizsga időtartama: 180 perc

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hiba** esetén, egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. összetevőjének B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

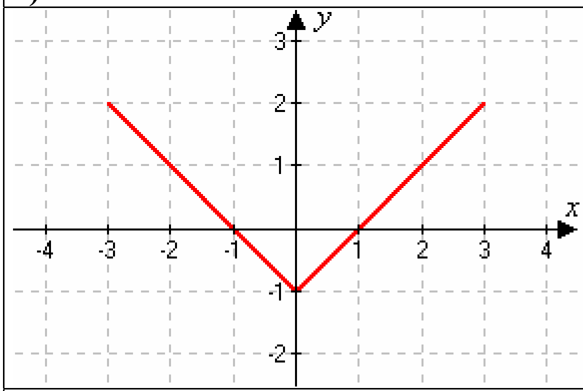
I.

1.		
$x_1 = -3$.	1 pont	
$x_2 = 3$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A háromszög területe 30 cm^2.	2 pont	*Mértékegység nélküli helyes válaszért 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
A gép értékének 10%-a: $250\ 000 \cdot 0{,}1 = 25\ 000$ (Ft). Egy év múlva: 250 000 (Ft) – 25 000 (Ft). *VAGY:* Egy év után 90%-ra csökken az érték: $0{,}9 \cdot 250\ 000$.	2 pont	*2 pont a szöveg nélkül is jár.*
A gép értéke: 225 000 Ft lesz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
$\sin\alpha = \frac{2}{5}$. $\alpha \approx 23{,}58°$.	2 pont	*A helyes végeredmény közlése 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
a)		
	2 pont	*Ha nem veszi figyelembe az értelmezési tartományt, akkor csak 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

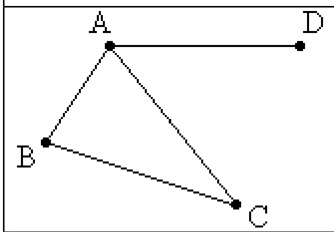
b)		
A legkisebb függvényérték: -1.	1 pont	*A megrajzolt függvény minimum értékének jó meghatározásáért jár 1 pont.*
Összesen:	**1 pont**	

6.		
$x = 4$.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$\frac{10}{50}$ vagy $\frac{1}{5}$ vagy 0,2 vagy 20%.	2 pont	*Bármilyen formában adja meg a helyes végeredményt, 2 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

8.		
$\alpha_1 = 60°$.	1 pont	
$\alpha_2 = 300°$.	1 pont	*Ha $\alpha = -60°$-ot ír, arra nem jár pont.*
Összesen:	**2 pont**	*A radiánban megadott helyes eredményekre is 2 pont jár.*

9.		
A helyes válasz betűjele: **A.**	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

11.		
$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 4^2 \cdot \pi \cdot 12$.	2 pont	*A térfogat helyes meghatározásáért 3 pont jár. Ha a sugár helyett átmérővel számol, akkor a 3 pontból legfeljebb 2 pontot kaphat.*
$V \approx 603$ cm^3.	1 pont	
$\frac{1}{2}$ liter = 500 cm^3, tehát belefér a bögrébe.	1 pont	*A helyes válaszra jár az 1 pont, az átváltásnak nem feltétlenül kell szerepelnie.*
Összesen:	**4 pont**	

12.		
a)		
Egy lap területe 9 cm^2.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is megkapja, ha nem ír mértékegységet*
A felszín 14 lap területének összege.	1 pont	
$A = 14 \cdot 9\ \text{cm}^2 = 126\ \text{cm}^2$.	1 pont	*Ha a válaszban nem ír mértékegységet, akkor ez az 1 pont nem jár. Ha egy kocka felszínét helyesen kiszámolja, de a kérdezett felszín értékét nem jól határozza meg, akkor összesen 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

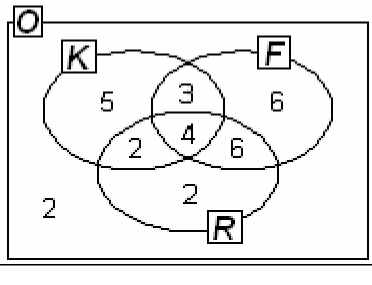
b)		
A keletkező test térfogata $3 \cdot 3^3\,\text{cm}^3 = 81\,\text{cm}^3$.	1 pont	*Mértékegység nélküli válaszért 0 pont jár.*
Összesen:	**1 pont**	

II./A

13.		
a)		
1. megoldás		
$\left.\begin{array}{ll}(1) & 2x-6y=4;\\(2) & 3x+5y=20.\end{array}\right\}$		
(1) $2x = 4 + 6y$. $x = 2 + 3y$.	1 pont	*Az egyik ismeretlen kifejezése 1 pont.*
(2) $3(2+3y)+5y = 20$.	1 pont	
$6 + 9y + 5y = 20$.	1 pont	
$y = 1$.	1 pont	*A másik ismeretlen meghatározása összesen 3 pont.*
$x = 2 + 3y = 5$.	1 pont	
Ellenőrzés. Megoldás: (5; 1).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. megoldás		
$(1)\quad 2x-6y=4;$ $(2)\quad 3x+5y=20.$		
$(1)\quad 10x-30y=20;$ $(2)\quad 18x+30y=120.$	2 pont	*Az egyenlő együtthatók kialakításáért összesen 2 pont.*
$28x=140$.	1 pont	*Az egyik ismeretlen meghatározásáért összesen 2 pont.*
$x=5$.	1 pont	
$2\cdot 5-6y=4$. $y=1$.	1 pont	*A másik ismeretlen meghatározásáért összesen 1 pont.*
Ellenőrzés. Megoldás: (5; 1).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

b)		
$\sqrt{x+2}=x$ $x+2=x^2$ $x^2-x-2=0$	1 pont	
$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$.	1 pont	*A másodfokú egyenlet helyes megoldásáért összesen 3 pont jár.*
$x_1=2$.	1 pont	
$x_2=-1$.	1 pont	
Ellenőrzés: $x_2=-1$ hamis gyök.	1 pont	
$x_1=2$ megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14.		
a)		
	4 pont	*Minden helyesen beírt számra 0,5 pontot adjunk, és a végeredményt kerekítsük fel egész pontra.*
Összesen:	**4 pont**	

b)		
A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére. *VAGY:* A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

c)		
Az öt tanulót $\binom{19}{5}=\frac{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{5!}=$	2 pont	*Kevésbé részletes, de helyes számolás esetén is teljes pontszám jár.*
= 11 628-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

d)		
A mérkőzések száma összesen: $\frac{6\cdot5}{2}=15$.	1 pont	*Ha az ábra alapján állapítja meg az összes mérkőzés számát, akkor is jár az 1 pont.*
Eddig lejátszottak 9 mérkőzést.	1 pont	
6 mérkőzés van még hátra.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
Ha megrajzolja és megszámolja azokat az éleket, amelyekkel a gráf teljes gráffá egészíthető ki, és jól válaszol, akkor is jár a maximális pont.		

15.

a)		
$a_1=5$ és $a_2=8$. $d=a_2-a_1=3$.	1 pont	
$a_{80}=a_1+79d$. $a_{80}=242$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

b)		
Ha 2005 a sorozat *n*-edik tagja, akkor $2005=5+(n-1)\cdot3$.	1 pont	
$2000=(n-1)\cdot3$,		*Ha itt megáll, és arra hivatkozik, hogy* 2000 *nem osztható 3-mal, tehát a* 2005 *nem tagja a sorozatnak, akkor is jár a 3 pont.*
azaz $\frac{2003}{3}=n$.	1 pont	
Mivel $\frac{2003}{3}\notin\mathbf{N}^+$, a 2005 nem tagja a sorozatnak.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

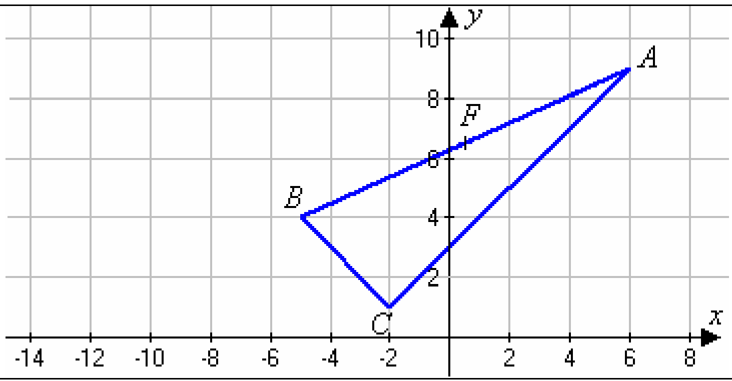
c)		
Az első *n* tag összege: $S_n=\frac{5+5+(n-1)\cdot3}{2}\cdot n=1550$.	2 pont	
Ebből $(10+3n-3)\cdot n=3100$, azaz $3n^2+7n-3100=0$.	1 pont	

$n_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 37200}}{6}$,		
$n_1 = 31$,	1 pont	
$n_2 = \dfrac{-200}{6}$.	1 pont	
Mivel $n_2 \notin \mathbf{N}^+$, $n_1 = 31$ lehet csak a válasz.	1 pont	*Ha nem jelzi, hogy $n_2 \notin \mathbf{N}^+$, de helyesen választja ki az n értékét, akkor is jár az 1 pont.*
Ellenőrzés: $\dfrac{10 + 30 \cdot 3}{2} \cdot 31 = 1550$, tehát 31 tagot kell összeadni.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

B

A 16–18. feladatok közül a tanuló által megjelölt feladatot nem kell értékelni.

16.



a)

$\overrightarrow{AC}(-8; -8)$ $AC = \left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8 \cdot \sqrt{2} \approx 11{,}31$	2 pont	*A helyes válaszért jár a 2 pont, bármilyen alakban is adja meg.*
Összesen:	**2 pont**	

b)

$\overrightarrow{AB} = \underline{v}(-11;\ -5)$. $\underline{n}(-5;\ 11)$. $m = \dfrac{5}{11}$.	2 pont	*A $\underline{v}$, $\underline{n}$ vagy m meghatározására jár a 2 pont.*
Az AB egyenes egyenlete: $-5x + 11y = 69$, vagy $y = \dfrac{5}{11}x + \dfrac{69}{11}$.	2 pont	*Az egyenes egyenletének bármilyen alakban történő helyes felírásáért jár a 2 pont.*
Összesen:	**4 pont**	

c)		
1. megoldás		
$\overrightarrow{CB}(-3;\ 3)$.	1 pont	
$\overrightarrow{CA}(8;\ 8)$.	1 pont	
A vektorok skaláris szorzata: $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=-3\cdot 8+8\cdot 3=0$.	2 pont	
Mivel a két vektor skaláris szorzata 0, a két vektor merőleges egymásra, azaz a *C* csúcsnál derékszög van.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

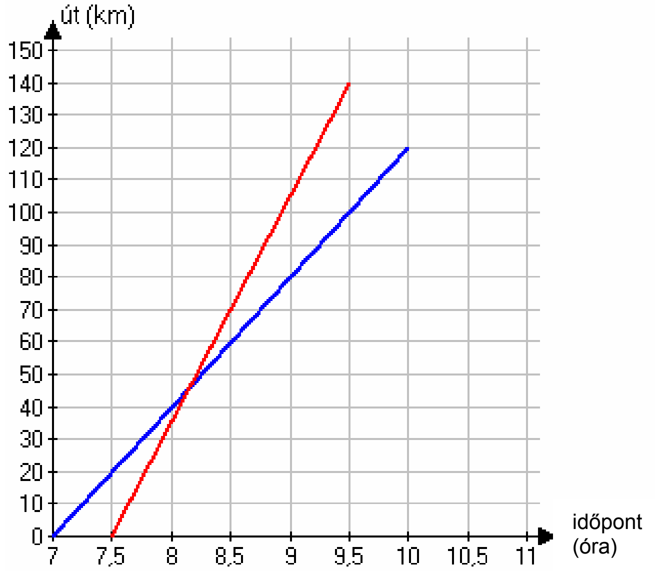
2. megoldás		
$\overrightarrow{CA}(8;\ 8)$; $\lvert\overrightarrow{CA}\rvert = CA=\sqrt{128}\approx 11{,}31$. (*)		
$\overrightarrow{BC}(3;\ -3)$; $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = BC=\sqrt{18}\approx 4{,}24$.	1 pont	
$\overrightarrow{AB}(-11;\ -5)$; $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = AB=\sqrt{146}\approx 12{,}08$.	1 pont	
Mivel $146=128+18$, azaz $AB^2=CA^2+BC^2$,	2 pont	
így a Pitagorasz tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	
(*) *A $\overrightarrow{CA}$ vektor hosszának kiszámításáért az **a)** részben jár a 2 pont.*		

3. megoldás		
$m_{CB}=-1$.	1 pont	
$m_{CA}=1$.	1 pont	
$m_{CB}\cdot m_{CA}=-1$, azaz a	2 pont	
CB és *CA* oldalegyenesek merőlegesek egymásra, tehát a háromszög *C* csúcsánál derékszög van.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

d)		
Mivel derékszögű a háromszög, Thalész tétele alapján a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó fele.	1 pont	*A kör középpontjának jó meghatározására kap összesen 3 pontot, az előtte lévő magyarázó szöveg nélkül is.*
$F(0{,}5;\ 6{,}5)$.	2 pont	
A kör sugara: $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{146}}{2}\approx 6{,}04$.	1 pont	*Közelítő érték is elfogadható.*
A kör egyenlete: $(x-0{,}5)^2+(y-6{,}5)^2=36{,}5$.	1 pont	*Ha a sugár közelítő értékével számol, akkor is jár az 1 pont.*
Összesen:	**5 pont**	

17.		
a)		
40 km.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

b)		
2,7 óra.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

c)		
	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

d)		
1. megoldás		
A tehervonat menetideje a találkozásig x óra.	1 pont	*Arra jár az 1 pont, hogy megnevezi, hogy mit jelöl x-szel. Ha ez a mondat hiányzik, de a megoldás végén a válaszból kiderül, hogy mit jelölt az ismeretlennel, akkor is jár az 1 pont. Ha nem ír mértékegységet, akkor is jár az 1 pont.*
A gyorsvonat menetideje a találkozásig $(x-0{,}5)$ óra.	1 pont	*Ha nem ír mértékegységet, akkor is jár az 1 pont.*
A két vonat megtett útja azonos: $40x = 70(x-0{,}5)$.	3 pont	*A helyes egyenlet felírásáért összesen 5 pont jár.*
$40x = 70x - 35$. $30x = 35$. $x = \frac{35}{30} = 1\frac{10}{60}$.	2 pont	*Az ismeretlen meghatározásáért jár a 2 pont.*
Tehát a két vonat 8 óra 10 perckor találkozik.	1 pont	

$40 \cdot \frac{35}{30} = \frac{140}{3} \approx 46{,}7$.	1 pont	
A gyorsvonat kb. 46,7 km út megtétele után éri utol a tehervonatot.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	
Ha a grafikonról olvassa le az eredményeket,és semmi további indoklást, számolást nem fűz hozzá, akkor maximum 2 pontot kaphat.		

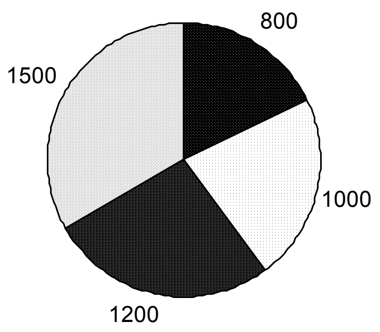
2. megoldás		
A tehervonat 0,5 óra alatt 20 km-t tesz meg.	1 pont	
A gyorsvonat 1 óra alatt 30 km-rel tesz meg többet, mint a tehervonat, azaz percenként 0,5 km-t hoz be a hátrányából.	3 pont	
A tehervonat 20 km-es előnyét a gyorsvonat 40 perc alatt hozza be,	2 pont	
tehát 8 óra 10 perckor éri utol.	2 pont	
$70 \cdot \frac{2}{3} = \frac{140}{3} \approx 46{,}7$.	1 pont	
A gyorsvonat kb. 46,7 km úton éri utol a tehervonatot.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

18.

a)		
$4! = 24$	2 pont	*Bármelyik formában megadott helyes eredményért jár a 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

b)		
Anna és Béla egymás mellett ülnek, ezért egy „elemnek” tekinthetjük őket, azaz 3 elemet kell permutálnunk: 3!.	2 pont	*Ha az összes eset felsorolásával kapja meg a jó megoldást, akkor is jár a teljes pontszám.*
Anna és Béla bármelyik fenti sorrendben helyet cserélhetnek egymással, ezért azon esetek száma, amikor Anna és Béla egymás mellett ülnek: $3! \cdot 2 = 12$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

c)		
$\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{2 \cdot 3!}{4!}$.	3 pont	
A kérdezett valószínűség: $\frac{2}{4}$ vagy 0,5 vagy 50%.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

d)		
A megadott százalékértékeknek megfelelő szögek: 1500Ft, 40%: 144°, 1200 Ft, 25%: 90°, 1000 Ft, 20%: 72°, 800 Ft, 15%: 54°.	1 pont	
	2 pont	*Ha a kördiagramról nem derül ki, hogy melyik százalékérték vagy melyik jegyár melyik körcikkhez tartozik, akkor csak 1 pont jár.* *Akkor fogadható el az ábra, ha a bejelölt határvonal a helyes megoldás tízes szomszédai közé esik*
Összesen:	**3 pont**	

e)		
Kiszámolható, hogy a különböző árú jegyekből hány darab fogyott: 480 db – 800 Ft-os jegy; 300 db – 1000 Ft-os jegy; 240 db – 1200 Ft-os jegy; 180 db – 1500 Ft-os jegy.	2 pont	*Ha 2 vagy 3 értéket jól kiszámol, akkor 1 pont jár.*
$\frac{480\cdot 800+300\cdot 1000+240\cdot 1200+180\cdot 1500}{1200}=$ $=1035$	2 pont	
Az átlagár tehát 1035 Ft.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	