Hódmezővásárhelyi Városi Matematikaverseny
1999. április 21.
A 9-10. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1. Vezessük be az $a = |x|$ jelölést. Ekkor az egyenlet

$$\left|\frac{3a+2}{a-1}\right| = 3$$

alakú . (1 pont)

Az abszolút érték felbontása után az

$$\frac{3a+2}{a-1} = 3 \qquad \text{vagy} \qquad \frac{3a+2}{a-1} = -3$$

egyenleteket kapjuk, természetesen megoldásként csak nemnegatív a értékek fogadhatók el. (3 pont)

Az első egyenletnek nincs megoldása, a másodikból $a=\frac{1}{6}$ adódik.

Az eredeti egyenlet gyökei: $x=\frac{1}{6}$ és $x=-\frac{1}{6}$ (2 pont)

2.a) x kiemelése után az $x^3 - 12x^2 + 47x - 60$ polinomot kapjuk. Vegyük észre, hogy a polinomnak $x=3$ zéróhelye. (3 pont)

Osztva $x^3 - 12x^2 + 47x - 60$-at az $(x-3)$ gyöktényezővel, hányadosként $x^2 - 9x + 20$-at kapunk, ami $(x-4)(x-5)$ -tel egyenlő.

Az eredeti polinom szorzat-alakja tehát: $x(x-3)(x-4)(x-5)$ (2 pont)

2.b). Az eredeti kifejezés a zárójelek felbontása után

$$abx^2 - aby^2 + a^2xy - b^2xy$$

alakban írható. (1 pont).

Az összeg első és harmadik tagjából ax, a második és negyedik tagból pedig by emelhető ki, amivel a kifejezésre

$$ax(bx+ay) - by(ay+bx)\cancel{)} = (ax - by)(ay+bx)\cancel{)}$$

adódik. (2 pont)

3. Mivel az egyenlet másodfokú tagjának együtthatója pozitív, a konstans pedig negatív, az egyenletnek mindig van két valós gyöke. (1 pont)

Vegyük észre, hogy $(x_1+1)(x_2+1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$, amiből a gyökök és együtthatók közötti összefüggést alkalmazva $(x_1+1)(x_2+1) = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a} + 1$ adódik. (1 pont)

A bizonyítandó egyenlőtlenség tehát a

$$-\frac{c}{a} - \frac{b}{a} + 1 \leq -1$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens, ami viszont (kihasználva, hogy a,b,c pozitívak)

$$a \leq \frac{b+c}{2}$$

alakra rendezhető. Ez az egyenlőtlenség az $a^2 = bc$ kezdeti feltételből valamint a számtani és mértani közepek közötti összefüggésből következik. A levezetés során végig ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, tehát a bizonyítandó állítás igaz. (3 pont)
Szintén a számtani és mértani közepek közötti összefüggésből és a végrehajtott ekvivalens átalakításokból következik, hogy a felírt egyenlőtlenségek oldalai akkor és csak akkor lesznek egyenlők, ha b=c. (1 pont).

Megjegyzés: mivel a levezetés során többször kihasználjuk, hogy a végrehajtott átalakítások ekvivalensek, teljes pontszámot csak annak a versenyzőnek javaslunk, aki a bizonyításban erre kitér. 2 pontot célszerű levonni akkor, ha a megoldás egyébként jó, de a feltételvizsgálat elmarad.

4. Jelölje A az ismert csúcsot, P_1 és P_2 pedig rendre a BC illetve CD oldalak egy-egy belső pontját. Vegyük észre, hogy a C csúcsból az AP_1 és AP_2 szakaszok egyaránt 45 fokos szögben látszanak. Ezért először 45 fokos szöghöz tartozó látószög-köríveket szerkesztünk az AP_1 és AP_2 szakaszok fölé. A két körív metszéspontja adja a C csúcsot. (4 pont)

A C csúcs meghatározása után a B és D csúcsokat rendre a CP_1 és CP_2 szakaszok egyeneseinek illetve az AC szakasz fölé rajzolt Thalész-körnek a metszéspontjaként állíthatjuk elő. (2 pont)
A feladatnak csak akkor van megoldása, ha egyrészt az AP_1P_2 háromszögben A-nál hegyesszög van, másrészt teljesülnek az

$$AP_1 < \sqrt{2}AP_2, \quad AP_2 < \sqrt{2}AP_1$$

egyenlőtlenségek. (2 pont)

5. Írjuk fel az egyenlet bal oldalát $2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x})$, a jobb oldalát pedig $2^7 \cdot 15$ alakban. Miután a kifejezésben szereplő mennyiségek pozitív egészek, továbbá a bal oldalon zárójelben szereplő kifejezés páratlan, a két oldal csak akkor lehet egyenlő, ha x=7, a zárójelben álló kifejezés értéke pedig 15. Ebből a

$$2^{y-7} + 2^{z-7} + 2^{t-7} = 14$$

egyenlet adódik, ami a fentihez hasonló módszerrel redukálható. Az eredeti egyenlet megoldása: x=7, y=8, z=9, t=10.

Megjegyzés: a fenti gondolatmenet alapján nehéz részpontszámokat megállapitani. Lényeges eleme viszont a fenti levezetésnek, hogy megmutatja: az egyenlet megoldása egyértelmű. Javasoljuk ezért, hogy bármely más úton történő megoldás esetén vonjunk le 4 pontot, ha a versenyző nem tér ki a megtalált gyök egyediségére.

6. Jelölje rendre a,b,c a téglalap oldalait illetve átlóját, tudjuk, hogy

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Először azt látjuk be, hogy az ab szorzat 3-mal osztható. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy sem a, sem pedig b nem osztható 3-mal.Kihasználva, hogy a 3-mal nem osztható négyzetszámok mindig 3k+1 alakúak (k egész), máris ellentmondásra jutunk, hiszen a bal

oldalon két ilyen négyzetszám összege áll, ezért a bal oldal 3-mal osztva 2 maradékot ad, ami lehetetlen, hiszen a jobb oldal is teljes négyzet.
Most belátjuk, hogy az ab szorzat 4-gyel is osztható. Ha a és b egyaránt páros, ez triviálisan teljesül. Másrészt könnyen látható, hogy a és b egyszerre nem lehet páratlan (ekkor ugyanis a bal oldal 4-gyel osztva 2 maradékot adna, így nem lehetne négyzetszám), elegendő tehát azzal az esettel foglalkozni, amikor a és b egyike (pl. a) páros, másika páratlan (ekkor természetesen c is páratlan). Rendezzük át az egyenletet

$$a^2 = (c-b)(c+b)$$

alakúra. c-b és c+b egyaránt párosak, továbbá - mivel különbségük egy páratlan szám kétszerese - egyikük 4-gyel is osztható, következésképpen a jobb oldal mindenképpen osztható 8-cal. Négyzetszám azonban csak akkor lehet, ha 16-tal is osztható, amiből következik, hogy a 4-gyel is osztható.

Megj. A fenti bizonyítást (vagy ezzel egyenértékű gondolatmenetet) a következőképpen érdemes tagolni: ha a versenyző hivatkozik a prímtulajdonságra (t.i. megmutatja, hogy az a és b törzstényezői között 2 db. kettest és egy hármast kell találni), adjunk 2 pontot. A 3-mal való oszthatóság bizonyítása 4 pont, a 4-gyel való oszthatóságé 6 pont. Javasoljuk bizonyítás nélkül elfogadni, hogy a 3-mal nem osztható számok négyzete 3k+1 alakú.