

Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely

2014. április 7.

A 11-12. osztályosok feladatai

1. Egy háromszög oldalai 7, 11 és 13 cm hosszúak. Számolja ki a leghosszabb oldalhoz tartozó súlyvonal hosszát és a súlyvonalnak az oldallal bezárt szögét!

(6 pont)

2. Nemrég egy TÖK eladáson Dr. Scheuring Istvántól hallhattunk az ún. „70-es szabályról”. A szabály azt állítja, hogy egy évente $p\%$ -kal növekvő exponenciális folyamat (ilyen lehet pl. egy $p\%$ -os kamatozású bankszámla) körülbelül $\frac{70}{p}$ év alatt n a kétszeresére. Ellenőrizzük, mennyire pontos a szabály! Készítsen táblázatot, ami $p=1, 2, 5, 10$ és 14 értékekre a szabály által történő közelítést összehasonlíttja a tényleges értékkel (a tényleges érték számításakor kamatos kamattal számoljon, feltesszük továbbá, hogy évente egyszer, a betét elhelyezésének fordulónapján számolunk kamatot). A táblázat kitöltésekor az évek számát fölsergezészrre kerekítve adja meg!

(7 pont)

3. Adott egy téglalap a derékszögű koordináta-rendszerben. Az egyik átló egyenlete $7x - 11y + 12 = 0$, a másiké $x - 13y + 76 = 0$, az átlók hossza pedig $\sqrt{170}$. Határozza meg a téglalap csúcsainak koordinátáit!

(8 pont)

4. Epszilónia nagyon kis ország, a parlamentje mindössze 10 képviselőből áll. A képviselők két egyéni körzetekben választják, minden körzetben egyszer többséggel. A választás előtti közvélemény-kutatások azt mutatják, hogy az A párt jelöltje minden körzetben 60%, a B párté pedig 40% valószínűséggel szerez mandátumot (körzetenként egymástól függetlenül). Mekkora a valószínűsége, hogy

a) valamennyi mandátumot az A párt nyeri?

b) valamennyi mandátumot a B párt nyeri?

c) a B párt legfeljebb 3 mandátumot szerez

(10 pont)

5. Legyen $k > 1$ pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy k darab tetszőleges különböző pozitív egész számból mindig kiválasztható valahány (legalább egy, legfeljebb k) úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható k -val.

(8 pont)

6. Határozza meg az összes olyan pozitív valós x számot, amelyre $\{\sqrt{x}\} = \sqrt{\{x\}}$ teljesül (tetszőleges z valós számra $\{z\}$ a szám tört részét, azaz a szám és a maximális, nála nem nagyobb egész szám különbségét jelöli).

(9 pont)