

**Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely**  
**2010. április 12.**  
**A 11-12. osztályosok feladatai**

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\cos^2 x \geq \cos x + 1$$

(6 pont)

2. A magyar országgyűlési választásokon a területi (megyei, ill. budapesti) listás mandátumok (képviselői helyek) elosztása a Hagenbach-Bischoff módszer segítségével történik. Az adott területen leadott érvényes szavazatok számát elosztják a kiosztható mandátumok száma + 1-gyel; ez az ún. kvóta, amely egy mandátum elnyeréséhez szükséges. Amelyik párt egyszer elérte a kvótát, az egy mandátumot kap, amelyik kétszer, az kettőt, amelyik háromszor, az hármát, stb<sup>1</sup>. Milyen határok között lehetett egy adott megyében az A és B pártokra leadott szavazatok *aránya*, ha tudjuk, hogy az A párt háromszor annyi mandátumot kapott, mint a B párt (és mindkét párt kapott mandátumot)?

(10 pont)

3. Külföldön egyes bankok a betétekre havi jóváírással számítják a kamatot. Ez úgy történik, hogy nem évente egy alkalommal fizetik ki a meghirdetett  $p$  százalékos kamatot, hanem minden hónapban jóváírják a számlán  $p/12$  százalékot (ezáltal a következő hónapban már a megnövelt összeg kamatozik).

- a) Igazolja, hogy bármely  $p > 0$  kamatláb esetén a fenti számítási mód valamivel kedvezőbb az ügyfél számára, mint az évi egyszeri kamatozás.
- b) Mekkora a különbség  $p = 10\%$  éves kamatláb esetén?

(7 pont)

4. Mekkora a területű síkidomokra bontja az

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$$

egyenletű kört az az egyenes, amely áthalad az A(1,11) és B(9,7) pontokon?

(8 pont)

5. Adott egy számtani sorozat, jelölje  $S_n$  az első  $n$  elem összegét. Igazolja, hogy tetszőleges  $n, k$  pozitív egészek esetén

$$(n+k)(S_n - S_k) = (n-k) S_{n+k}$$

(6 pont)

6. A Kheopsz-piramis négyzet alapú gúla. Magassága 147 méter, az alaplap éleinek hossza 230 méter.

- a) Milyen hosszúak az oldalélek és hány fokos szöget zárnak be a vízszintessel?
- b) Mekkora az oldallapok egymással és a vízszintessel bezárt szöge?
- c) Hány kamionnyi anyagot kellett megmozgatni a piramis építéséhez? (Egy kamion teherbírása 20 tonna, a piramis átlagos sűrűsége  $2000 \text{ kg/m}^3$ ).

(9 pont)

---

<sup>1</sup> A módszer a valóságban ennél valamivel bonyolultabb, a feladat kedvéért egyszerűsítettük.